

RECUPERO DI TIMING, FASE E FREQUENZA AD ANELLO CHIUSO

Author: Eugenio Rossini

1. RECUPERO DI TIMING.....	2
1.1. PRESTAZIONI DELL'ALGORITMO	2
1.1.1. <i>Funzione di trasferimento ed analisi della stabilità</i>	2
1.1.2. <i>Costanti di anello</i>	3
1.1.3. <i>Banda equivalente di rumore</i>	4
1.1.4. <i>Valor medio e varianza della stima</i>	5
1.1.5. <i>Limite di Cramer-Rao</i>	8
1.2. COMPORTAMENTO IN PRESENZA DI DOPPLER.....	9
1.2.1. <i>Errore a regime</i>	9
1.2.2. <i>Banda ottima</i>	11
2. PARAMETRI STATISTICI DELLA RISPOSTA.....	13
2.1. VALOR MEDIO	13
2.2. VARIANZA	13
2.3. CALCOLO DI VALOR MEDIO E VARIANZA.....	16
2.3.1. <i>Algoritmo a Blocchi</i>	16
2.3.2. <i>Algoritmo a Finestra</i>	16
2.3.3. <i>Algoritmo Ricorsivo</i>	17
2.3.4. <i>Confronto tra gli Algoritmi</i>	18
3. FILTRI A MEDIA	19
4. BANDA EQUIVALENTE DI RUMORE	20
5. POTENZA DI UN SEGNALE MPSK.....	21
6. RECUPERO DI FASE E FREQUENZA.....	22
6.1. INTRODUZIONE	22
6.2. PRESTAZIONI DELL'ALGORITMO	23
6.2.1. <i>Funzione di trasferimento ed analisi della stabilità</i>	23
6.2.2. <i>Costanti di anello</i>	23
6.2.3. <i>Banda equivalente di rumore</i>	23
6.2.4. <i>Valor medio e varianza della stima</i>	23
6.2.5. <i>Limite di Cramer-Rao</i>	26
6.3. COMPORTAMENTO IN PRESENZA DI DOPPLER.....	27
6.3.1. <i>Errore a regime</i>	27
6.3.2. <i>Banda ottima</i>	27
6.4. VALUTAZIONI NUMERICHE	28

1. Recupero di timing

1.1. PRESTAZIONI DELL'ALGORITMO

1.1.1. Funzione di trasferimento ed analisi della stabilità

L'analisi delle prestazioni è basata su un anello del secondo ordine facente uso di un early-late detector la cui curva ad S è approssimata con una funzione lineare passante per l'origine e di coefficiente angolare A come nella seguente Figura 1.

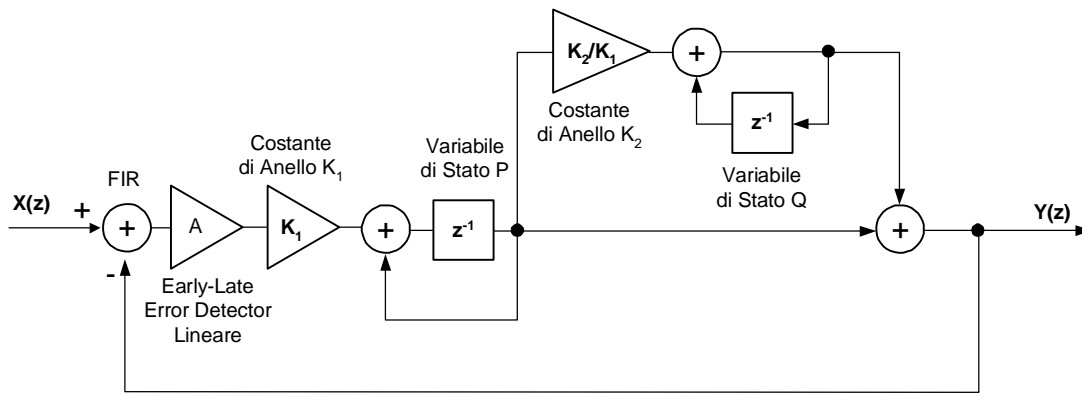


Figura 1 – Schema a blocchi dell'anello di inseguimento della temporizzazione

Nella Figura 1 $X(z)$ è la trasformata Z del ritardo del segnale ricevuto mentre $Y(z)$ è la trasformata Z della correzione temporale da effettuare. La correzione temporale è implementata attraverso un FIR le cui risposte impulsive variano in funzione di $Y(z)$. A tale scopo si utilizza lo stesso FIR che implementa il filtro matched da applicare al segnale ricevuto. Questo FIR è riportato in Figura 1 con il nodo sommatore in ingresso all'anello. La funzione di trasferimento di questo anello è data da:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{A(k_1(z-1) + k_2z)}{(z-1)^2 + A(k_1(z-1) + k_2z)}$$

Dove, per ragioni di stabilità deve risultare:

$$0 < A k_1 < 2$$

$$0 < A k_2 < 2 (2 - A k_1)$$

Applicando infatti la trasformazione bilineare:

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1} \quad z = \frac{1 + sT_s/2}{1 - sT_s/2} \quad z - 1 = \frac{sT_s}{1 - sT_s/2}$$

dove $1/T_s$ è la frequenza di lavoro dell'anello, alla funzione di trasferimento $H(z)$ si ottiene:

$$L(s) = (H(z))_{\text{BILINEAR}} = \frac{A(k_1+k_2) sT_s (1 - sT_s/2) + Ak_2 (1 - sT_s/2)^2}{s^2 T_s^2 + A(k_1+k_2) sT_s (1 - sT_s/2) + Ak_2 (1 - sT_s/2)^2}$$

ed il suo denominatore $D_L(s)$ è:

$$D_L(s) = (1 - A(k_1+k_2)/2 + Ak_2/4) T_s^2 s^2 + (A(k_1+k_2) - Ak_2) T_s s + Ak_2$$

Gli zeri di questo polinomio del secondo ordine (poli del sistema) sono tutti a parte reale negativa (condizione di stabilità) se i suoi coefficienti sono tutti positivi, dunque deve risultare:

$$\begin{cases} 4 - 2 Ak_1 - Ak_2 > 0 \\ Ak_1 > 0 \\ Ak_2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 < Ak_2 < 2(2 - Ak_1) \\ Ak_1 > 0 \end{cases}$$

questo comporta anche $2(2-Ak_1)>0$ e cioè $Ak_1<2$, come affermato.

1.1.2. Costanti di anello

Dall'analisi del denominatore $D(z)$ della funzione di trasferimento si ottengono subito il coefficiente di smorzamento e la frequenza naturale delle oscillazioni del transitorio. Approssimando infatti $z=\exp(sT_s)\approx 1+sT_s$ si ha ⁽¹⁾:

$$D_H(s) = (D(z))_{z=1+sT_s} = s^2 T_s^2 + A(k_1+k_2) sT_s + Ak_2$$

Per cui normalizzando ad 1 il coefficiente di s^2 e comparando con la forma canonica:

$$\frac{D_H(s)}{T_s^2} = s^2 + \frac{A(k_1+k_2)}{T_s} s + \frac{Ak_2}{T_s^2} = s^2 + 2\omega_n \zeta s + \omega_n^2$$

si ottiene:

$$\omega_n = \frac{1}{T_s} \sqrt{Ak_2} \quad \zeta = \frac{1}{2\omega_n} \frac{A(k_1+k_2)}{T_s} = \frac{\omega_n T_s}{2} \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right)$$

Esiste un valore ottimo di ζ per il quale il transitorio è di durata minima, tale valore corrisponde a $\zeta=0.7$. Imponendo questa condizione si ha:

$$\zeta = \frac{\sqrt{Ak_2}}{2} \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right) = 0.7 \quad \rightarrow \quad Ak_1 = 1.4 \sqrt{Ak_2} - Ak_2$$

⁽¹⁾ I due numeri complessi $\exp(i\omega T)$ e $(1+i\omega T)$ hanno approssimativamente stesso modulo e fase se $\omega T \ll 1$ ovvero $\omega \ll 1/T$ e quindi se le frequenze ω da analizzare dell'anello (ovvero quelle entro la sua banda) sono molto minori della sua frequenza di lavoro $1/T$, ipotesi spesso rispettata essendo di norma $1/T < 3\text{KHz}$ e la banda $< 300\text{Hz}$.

La Figura 2 mostra i vincoli che devono rispettare le costanti di anello per avere la stabilità ed in particolare mostra anche i valori che esse devono assumere affinché sia $\zeta=0.7$.

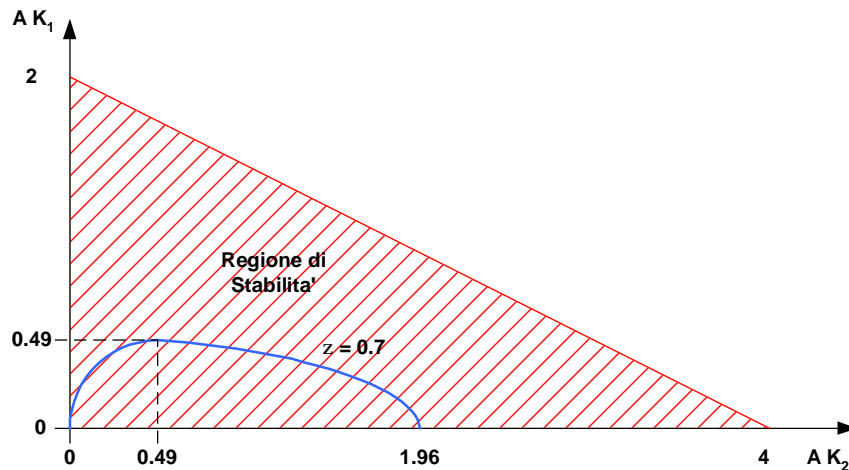


Figura 2 – Vincoli alle costanti di anello

Ad esempio fissando $Ak_2=10^{-2}$ si ha anche $Ak_1=0.13$ e questi possono essere valori utilizzati nella determinazione delle prestazioni dell'anello. In particolare forniscono, con $1/T_s=3\text{KHz}$:

$$\zeta = 0.7 \quad \omega_n = 3000 \sqrt{10^{-2}} = 300 \text{ Hz}$$

1.1.3. Banda equivalente di rumore

La banda equivalente di rumore dell'anello è definita da:

$$B = \frac{1}{2 |L(0)|^2} \int_{-1/2T_s}^{1/2T_s} |L(f)|^2 df$$

Essendo $L(f)=H(\exp(2\pi ifT_s))$ e T_s l'inverso della frequenza di lavoro dell'anello. Usando la trasformazione approssimata $z=\exp(sT_s)\approx 1+sT_s=1+2\pi ifT_s$ e le definizioni di smorzamento e frequenza naturale, si ottiene:

$$L(f) = \frac{2\omega_n\zeta s + \omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n\zeta s + \omega_n^2} = \frac{4i\omega_n\zeta\pi f + \omega_n^2}{-4\pi^2 f^2 + 4i\omega_n\zeta\pi f + \omega_n^2}$$

e dunque:

$$|L(f)| = \frac{16\omega_n^2\zeta^2\pi^2 f^2 + \omega_n^4}{(\omega_n^2 - 4\pi^2 f^2)^2 + 16\omega_n^2\zeta^2\pi^2 f^2} \quad \rightarrow \quad |L(0)| = 1$$

ed integrando si ha:

$$B = \frac{\omega_n}{2} \left(\zeta + \frac{1}{4\zeta} \right)$$

Nel caso sotto esame abbiamo $\omega_n=300\text{Hz}$, $\zeta=0.7$ per cui risulta:

$$B = \frac{300}{2} \left(0.7 + \frac{1}{2.8} \right) = 158.6 \text{ Hz}$$

In generale, fissato $\zeta=0.7$ si ha $B \approx 0.53\omega_n$.

La banda equivalente di rumore può anche essere determinata direttamente nel dominio z (vedi Cap.4) anche se qui è stato preferito un approccio che evidenziasse le grandezze più intuitive ω_n e ζ . In tal caso, con gli stessi valori di Ak_1 e Ak_2 si ottiene:

$$B = \frac{1}{2T_s} \frac{2k_2 + 2Ak_1^2 + Ak_1k_2}{k_1(4 - Ak_2 - 2Ak_1)} = 170.4 \text{ Hz}$$

1.1.4. Valor medio e varianza della stima

Il parametro utile per una valutazione delle prestazioni dell'algoritmo è la bontà della stima del ritardo in termini di valor medio e varianza. In generale più sorgenti possono concorrere alla accuratezza totale dell'algoritmo, qui verranno esaminate le seguenti:

- Errore di troncamento della stima effettuato per ridurre ad un numero accettabile le risposte impulsive del FIR che implementa la correzione;
- Rumore termico associato con il segnale ricevuto elaborato dal rivelatore di errore in questo caso implementato con un Early-Late Detector (ELD);

Errore di troncamento della stima

Detto M il numero finito di suddivisioni di un chip che può implementare il filtro FIR, l'errore di troncamento della stima può essere assimilato a rumore bianco $N(z)$ con valor medio nullo e varianza $T_c^2/12M^2$. Lo schema a blocchi dell'anello diventa allora quello di Figura 3:

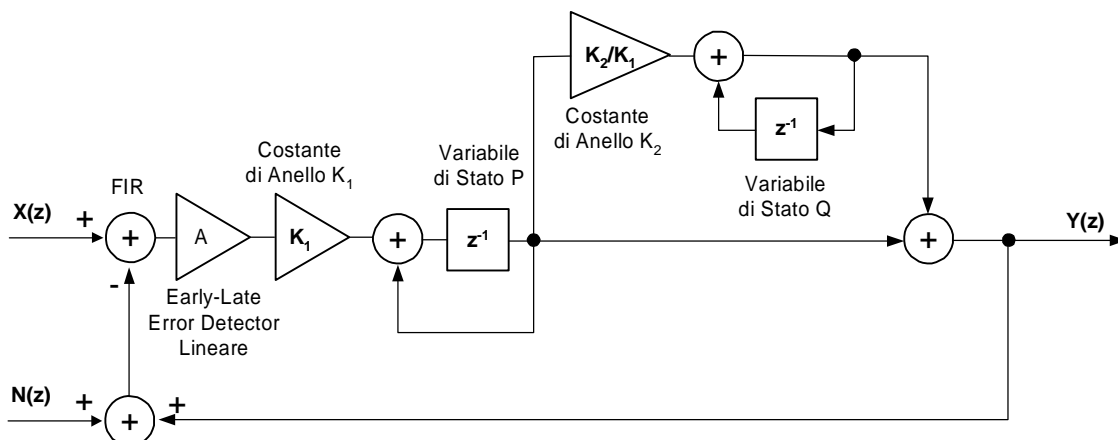


Figura 3 – Schema a blocchi dell'anello di inseguim. della temporizz. con M divisioni del chip

L'effetto dell'anello sull'ingresso $N(z)$ è quello che si ottiene azzerando momentaneamente l'ingresso $X(z)$. In tal caso, nell'ipotesi di linearità del sistema e con $N(z)$ a valor medio nullo (vedi paragrafo 2.1):

$$E(H(z)N(z)) = H(1) E(N(z)) = 0$$

Cioè la stima del ritardo è non polarizzata. Per quanto riguarda la varianza, essa è data da (vedi paragrafo 2.2):

$$\sigma_M^2 = 2 B |H(1)|^2 T_s \sigma_N^2 = 2 B |H(1)|^2 T_s \frac{T_c^2}{12 M^2}$$

Se ipotizziamo $H(1)=1$, $1/T_s=3\text{KHz}$, $1/T_c=3.069\text{MHz}$, $B=158.6\text{Hz}$, $M=32$ per cui risulta:

$$\sigma_M^2 = 2 \cdot 158.6 \cdot \frac{1}{3000} \cdot \frac{10^{-12}}{9.42} \cdot \frac{1}{12288} = 0.92 \cdot 10^{-18}$$

che comporta una deviazione standard di:

$$\sqrt{\sigma_M^2} = 0.96 \cdot 10^{-9} = 0.96 \text{ ns}$$

Rumore termico

Detta $g(t)$ la forma dell'impulso trasmesso, ed ipotizzata la validità della $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = 1$ un ELD, a fronte di un errore di timing τ al suo ingresso restituisce un errore in uscita pari a:

$$e(\tau) = A^2 g^2\left(\frac{T_c}{2} + \tau\right) - A^2 g^2\left(-\frac{T_c}{2} + \tau\right)$$

Dove "A" è l'ampiezza dell'impulso di segnalazione. Questa relazione fornisce una rappresentazione della curva ad S dell'ELD ed ha pendenza nell'origine data da:

$$\left(\frac{de(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau=0} = 2 A^2 g\left(\frac{T_c}{2}\right)g'\left(\frac{T_c}{2}\right) - 2 A^2 g\left(-\frac{T_c}{2}\right)g'\left(-\frac{T_c}{2}\right) \approx A^2 \frac{3.7}{T_c^2} = 2 S T_c \frac{3.7}{T_c^2} = \frac{7.4 S}{T_c}$$

Qui l'approssimazione fatta è valida nell'ipotesi in cui $g(t)$ abbia la forma della radice quadrata di un coseno rialzato (SRRC) ed inoltre si è sfruttata la relazione $S=A^2/2T_c$ valida per la potenza di un segnale MPSK (vedi Cap.5). Questa pendenza rappresenta il fattore di guadagno che subisce l'errore τ nel passaggio attraverso l'ELD e deve essere compensata in uscita per avere un valore fisico corretto. Lo schema di principio dell'ELD che include anche:

- il filtro FIR (SRRC Matched Filter) che implementa anche le correzioni temporali;

- il filtro di correlazione (Correlator Filter) che integra i chips corrispondenti ad un dato simbolo permettendo in tal modo la riduzione della varianza del rumore di un fattore T_s/T_c ;

è riportato in Figura 4.

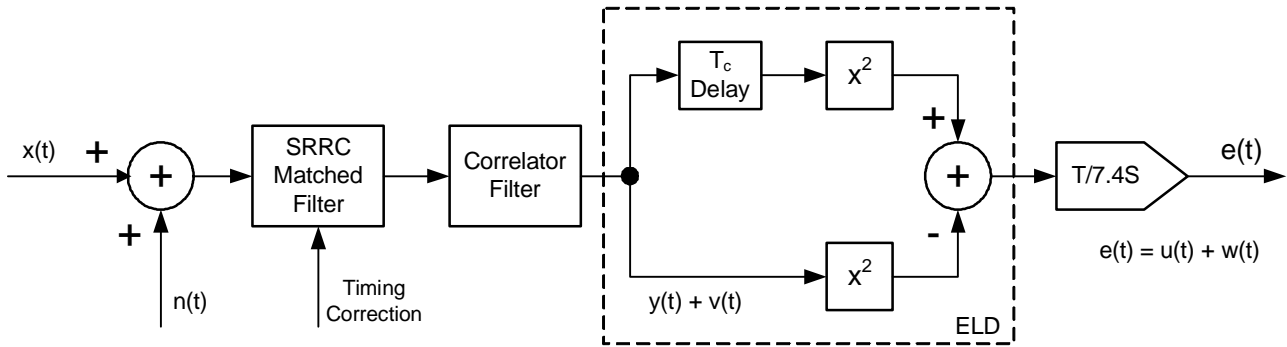


Figura 4 – Schema a blocchi dell’ELD e della catena di filtraggio del segnale

La varianza dell’errore in uscita dall’ELD si può allora determinare dalla:

$$e(t) = \frac{T_c}{7.4 S} [(y(t+T_c) + v(t+T_c))^2 - (y(t) + v(t))^2] = \frac{T_c}{7.4 S} [y^2(t+T_c) - y^2(t)] + w(t)$$

Essendo $w(t)$ il termine di rumore in uscita ed $u(t) = y^2(t+T_c) - y^2(t)$ il segnale voluto. Si ha:

$$w(t) = \frac{T_c}{7.4 S} [v^2(t+T_c) - v^2(t) + 2y(t+T_c)v(t+T_c) - 2y(t)v(t)]$$

$$E(w) = \frac{T_c}{7.4 S} [E(v^2) - E(v^2) + 2E(y)E(v) - 2E(y)E(v)] = 0$$

$$\sigma_w^2 = \frac{T_c^2}{54.76 S^2} [2\sigma_{v^2}^2 + 4 S \sigma_v^2]$$

Dove:

$S = S_y = S_x$ = potenza dei segnali $x(t)$ ed $y(t)$ (i filtri SRRC e correlatore sono supposti a guadagno unitario);

$\sigma_{v^2}^2 = 3(\sigma_v^2)^2$ come si calcola facilmente se si suppone il rumore gaussiano;

$\sigma_v^2 = (T_s/T_c) \sigma_n^2$ per effetto del filtro correlatore;

Dunque:

$$\sigma_w^2 = \frac{2 T_c^2}{54.76 S^2} \left(3 \left(\frac{T_c}{T_s} \sigma_n^2 \right)^2 + 2 S \frac{T_c}{T_s} \sigma_n^2 \right) = \frac{T_c^2}{27.38 S^2} \left(3 \frac{T_c^2}{T_s^2} N^2 + 2 S \frac{T_c}{T_s} N \right)$$

Avendo indicato con N la potenza del rumore $n(t)$.

$$\sigma_w^2 = \frac{T_c^3}{27.38 T_s} \left(3 \frac{T_c}{T_s} \frac{N^2}{S^2} + 2 \frac{N}{S} \right) = \frac{T_c^3}{27.38 T_s} \frac{N}{S} \left(3 \frac{T_c}{T_s} \frac{N}{S} + 2 \right)$$

Posto ora $N=N_0 B_{IF}=N_0(1+\alpha)/T_c$, dove B_{IF} è la banda del segnale ricevuto ed α il fattore di roll-off dello SRRC, si ottiene:

$$\sigma_w^2 = \frac{T_c^2}{27.38} \frac{1+\alpha}{T_s} \frac{N_0}{S} \left(3 \frac{1+\alpha}{T_s} \frac{N_0}{S} + 2 \right)$$

Considerando infine questa varianza come input al filtro di anello:

$$\sigma_T^2 = 2 B |H(1)|^2 T_s \sigma_w^2 = 2 B |H(1)|^2 (1+\alpha) \frac{T_c^2}{27.38} \left(\frac{S}{N_0} \right)^{-1} \left(3 \frac{1+\alpha}{T_s} \left(\frac{S}{N_0} \right)^{-1} + 2 \right)$$

Se ipotizziamo $(S/N_0)_{dB}=41dBHz$, $\alpha=0.22$, $H(1)=1$, $1/T_s=3KHz$, $B=158.6Hz$ e $1/T_c=3.069MHz$:

$$\sigma_T^2 = \frac{317.2}{27.38} \frac{1.22}{9.42} \frac{1}{10^{12}} 10^{-41/10} (3 \cdot 1.22 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-41/10} + 2) = 0.12 \cdot 10^{-15} (0.87 + 2) = 344.4 \cdot 10^{-18}$$

A cui corrisponde una deviazione standard (jitter) di:

$$\sqrt{\sigma_T^2} = 18.6 \text{ ns}$$

Questo limite può essere abbassato diminuendo la banda.

1.1.5. Limite di Cramer-Rao

In generale la stima non può avere una varianza migliore del Modified Cramer Rao Bound (MCRB) che è dato da:

$$\text{MCRB} = \frac{B T_c^3}{4 \pi^2 \xi} \left(\frac{E_s}{N_0} \right)^{-1} = \frac{B T_c^3}{4 \pi^2 \xi T_s} \left(\frac{S}{N_0} \right)^{-1} \quad \text{dove: } \xi = \frac{1}{12} + \alpha^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \right)$$

essendo α il fattore di roll-off del filtro FIR ed E_s l'energia di simbolo qui assimilabile all'energia associata al campione integrato usato nell'anello e pertanto $E_s=ST_s$ dove S e' la potenza del segnale in ingresso all'anello.

Nel caso sotto esame si ha $(S/N_0)_{dB}=41dBHz$, $\alpha=0.22$ da cui $\xi=0.0856$ e quindi, considerando $1/T_c=3.069 \text{ MHz}$, $1/T_s=3KHz$ e $B=158.6Hz$:

$$\text{MCRB} = \frac{158.6 \cdot 3000}{39.48 \cdot 0.0856 \cdot 28.9 \cdot 10^{18}} 10^{-41/10} = 0.39 \cdot 10^{-18}$$

per cui la standard deviation della stima risulta essere:

$$\sqrt{\text{MCRB}} = 0.62 \text{ ns}$$

1.2. COMPORTAMENTO IN PRESENZA DI DOPPLER

1.2.1. Errore a regime

Se $F(\omega)$ è la trasformata di Fourier di una generica funzione del tempo $f(t)$ che rappresenta un segnale su cui agisce un effetto doppler di entità $\beta(t)=v(t)/c$, la funzione $G(\omega)$ risultante deve essere tale che, per ogni ω :

$$F(\omega) = G(\omega + \beta(t)\omega)$$

Posto $\Omega=\omega(1+\beta(t))$, la trasformata inversa ⁽²⁾ di G è:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega) e^{i \Omega t} d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{\Omega}{1+\beta(t)}\right) e^{i \Omega t} d\Omega$$

$$g(t) = (1+\beta(t)) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i \omega (1+\beta(t)) t} d\omega = (1+\beta(t)) f((1+\beta(t)) t)$$

in particolare per un segnale modulato trasmesso $s(t)$:

$$s(t) = \sum_k a_k g(t - kT) \cos(\omega_c t)$$

si ha un segnale ricevuto $r(t)$ dato da:

$$r(t) = \sum_k (1+\beta(t)) a_k g(t(1+\beta(t)) - kT) \cos(\omega_c t(1+\beta(t))) = \sum_k \alpha_k g(t-kT+\tau(t)) \cos((\omega_c+\omega_d(t))t)$$

cioè un segnale affetto da un errore di temporizzazione $\tau(t)=\beta(t)t$ ed un errore di frequenza $\omega_d(t)=\beta(t)\omega_c$. Se la velocità a cui si muove il satellite è costante allora $\beta(t)=\beta_0$ è costante e si ha un errore lineare di temporizzazione $\tau(t)=\beta_0 t$ ed un errore costante di frequenza $\omega_d=\beta_0\omega_c$.

Supponendo ora di avere una doppler rate μ costante (di dimensione sec^{-1}):

$$\mu = \frac{\partial \beta(t)}{\partial t} \rightarrow \beta(t) = \mu t + \beta_0 \rightarrow \begin{cases} \tau(t) = (\mu t + \beta_0) t \\ \omega_d(t) = (\mu t + \beta_0) \omega_c \end{cases}$$

Per ottenere i valori dell'errore a regime dell'anello di temporizzazione che costituisce l'algoritmo di Ranging occorre dunque fornire al suo ingresso $x(n)$ una parabola con le suddette caratteristiche.

⁽²⁾ Rigorosamente occorrerebbe prendere la "Inverse Short-Time Fourier-Transform (ISTFT)" perché la G dipende anche dal tempo, comunque, per quanto riguarda le considerazioni qui riportate, è sufficiente considerare una finestra temporale abbastanza breve per ritenere tale dipendenza circa costante. In tal caso la ISTFT è bene approssimata dalla "Inverse Fourier Transform (IFT)".

Poichè il segnale è supposto campionato alla frequenza di lavoro dell'anello e cioè con periodo T_s , si deve allora imporre:

$$x(n) = \left(\mu t^2 \right)_{t = nT_s} = \mu n^2 T_s^2 \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{\mu T_s^2 z (1+z)}{(z-1)^3}$$

L'anello del secondo ordine da considerare è quello riportato in Figura 5:

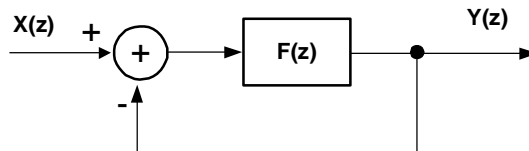


Figura 5 – Anello di inseguimento della temporizzazione

dove $F(z)$ è:

$$F(z) = \frac{A k_1}{z-1} + \frac{A k_2 z}{(z-1)^2}$$

ed il cui errore è definito dalla:

$$\varepsilon(z) = X(z) - Y(z) = X(z) \left(1 - \frac{F(z)}{1 + F(z)} \right) = X(z) \frac{1}{1 + F(z)}$$

L'errore a regime è fornito dalla:

$$\varepsilon_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) X(z) \frac{1}{1 + F(z)}$$

dunque:

$$\varepsilon_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{\mu T_s^2 z (1+z)}{(z-1)^3} \frac{(z-1)^2}{(z-1)^2 + A k_1(z-1) + A k_2 z} = \frac{2 \mu T_s^2}{A k_2} = \frac{2 \mu}{\omega_n^2}$$

Se per una valutazione numerica consideriamo al solito $\omega_n=300\text{Hz}$, otteniamo:

$$\frac{\varepsilon_\infty}{\mu} = \frac{2}{9 \cdot 10^4} = 22.22 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^2$$

1.2.2. Banda ottima

Considerando tutti i contributi all'errore di stima:

- Errore di troncamento della stima che pilota le risposte impulsive del FIR a SRRC;
- Rumore termico associato con il segnale ricevuto;
- Errore a regime dovuto alla risposta dell'anello del secondo ordine alla doppler rate;

si può definire una funzione di ottimizzazione $f(B)$ la cui minimizzazione permette di scegliere la banda ottima B_{OPT} da usare nell'anello di inseguimento della temporizzazione:

$$f(B) = \sqrt{\sigma_M^2} + \sqrt{\sigma_T^2} + \varepsilon_\infty$$

Il valore $f(B_{OPT})$ fornisce in tal caso la deviazione standard minima raggiungibile dal sistema. Allo scopo di semplificare la notazione introduciamo i coefficienti a, b, c ponendo:

$$\sigma_M^2 = 2 B |H(1)|^2 T_s \frac{T_c^2}{12 M^2} = \frac{a B}{M^2}$$

$$\sigma_T^2 = 2 B |H(1)|^2 (1 + \alpha) \frac{T_c^2}{27.38} \left(\frac{S}{N_0} \right)^{-1} \left(3 \frac{1 + \alpha}{T_s} \left(\frac{S}{N_0} \right)^{-1} + 2 \right) = b_{S/N_0} B$$

$$\varepsilon_\infty = \frac{2 \mu}{\omega_n^2} = \frac{2 \mu}{4 B^2} \left(\zeta + \frac{1}{4\zeta} \right)^2 = \frac{c \mu}{B^2}$$

Per cui:

$$f(B) = \left(\frac{\sqrt{a}}{M} + \sqrt{b_{S/N_0}} \right) \sqrt{B} + \frac{c \mu}{B^2}$$

Si può allora annullare la derivata:

$$f'(B) = \left(\frac{\sqrt{a}}{M} + \sqrt{b_{S/N_0}} \right) \frac{1}{2\sqrt{B}} - 2 \frac{c \mu}{B^3} = 0$$

Ottenendo:

$$B_{OPT} = \left(\frac{4 c \mu}{\frac{\sqrt{a}}{M} + \sqrt{b_{S/N_0}}} \right)^{2/5}$$

Per una valutazione numerica consideriamo $(S/N_0)_{dB}=41dBHz$, $\alpha=0.22$, $H(1)=1$, $1/T_s=3KHz$ e $1/T_c=3.069MHz$, $M=32$, $\mu=6E-10sec^{-1}$. Si ha allora:

$$a = 2 |H(1)|^2 T_s \frac{T_c^2}{12} = \frac{2}{3000} \frac{1}{12} \frac{1}{9.42 \cdot 10^{12}} = 5.9 \cdot 10^{-18}$$

$$b_{S/N_0} = 2 |H(1)|^2 (1 + \alpha) \frac{T_c^2}{27.38} \left(\frac{S}{N_0} \right)^{-1} \left(3 \frac{1 + \alpha}{T_s} \left(\frac{S}{N_0} \right)^{-1} + 2 \right) = 2.2 \cdot 10^{-18}$$

$$c = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{4\zeta} \right)^2 = 0.56$$

E infine:

$$B_{\text{OPT}} = \left(\frac{4 c \mu}{\frac{\sqrt{a}}{M} + \sqrt{b_{S/N_0}}} \right)^{2/5} = \left(\frac{4 \cdot 0.56 \cdot 6 \cdot 10^{-10}}{\frac{\sqrt{5.9 \cdot 10^{-18}}}{32} + \sqrt{2.2 \cdot 10^{-18}}} \right)^{2/5} = 0.94 \text{ Hz}$$

Da cui anche:

$$f(B_{\text{OPT}}) = \left(\frac{\sqrt{a}}{M} + \sqrt{b_{S/N_0}} \right) \sqrt{B_{\text{OPT}}} + \frac{c \mu}{(B_{\text{OPT}})^2} = \left(\frac{\sqrt{5.9 \cdot 10^{-18}}}{32} + \sqrt{2.2 \cdot 10^{-18}} \right) \sqrt{0.94} + \frac{0.56 \cdot 6 \cdot 10^{-10}}{0.94^2} = 1.9 \text{ ns}$$

Inoltre, in corrispondenza della banda ottima si ha anche:

$$\left(\frac{\varepsilon_\infty}{\mu} \right)_{\text{OPT}} = \frac{c}{B_{\text{OPT}}^2} = \frac{0.56}{0.94^2} = 0.63 \text{ sec}^2$$

2. Parametri Statistici della Risposta

2.1. VALOR MEDIO

Un generico sistema lineare ha equazione e corrispondente funzione di trasferimento date da:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x(n-k) \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^{-k}$$

Il valor medio della sequenza di uscita può essere messo nella forma:

$$E(y(n)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k E(x(n-k))$$

e, se la sequenza è stazionaria, detto μ il suo valor medio:

$$\mu_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mu_x \quad \rightarrow \quad \mu_y = H(1) \mu_x$$

2.2. VARIANZA

La covarianza di una sequenza, supposta stazionaria, è data da:

$$\gamma_{xx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x(k) - \mu_x) (x(k+n) - \mu_x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k) x(k+n) - \mu_x^2 = \varphi_{xx}(n) - \mu_x^2$$

essendo φ_{xx} la sua autocorrelazione. La varianza della sequenza può allora essere espressa come:

$$\sigma_x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x(k) - \mu_x)^2 = \gamma_{xx}(0) = \varphi_{xx}(0) - \mu_x^2$$

Ciò comporta che per la determinazione della varianza di una sequenza è sufficiente ricavare la sua autocorrelazione ed il suo valor medio. In particolare per ottenere la varianza dell'uscita di un sistema lineare occorre prima di tutto calcolare la:

$$\begin{aligned} \varphi_{yy}(n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(k) y(k+n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p x(k-p) \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_q x(n+k-q) \\ \varphi_{yy}(n) &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_q \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) x(n+m+p-q) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_q \varphi_{xx}(n+p-q) \end{aligned}$$

Prendendo allora la discrete-time Fourier transform ⁽³⁾:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \exp(-i\omega nT) \quad x(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(\omega) \exp(i\omega nT) d\omega$$

ad entrambi i lati, si ottengono le densità spettrali di potenza (teorema di Wiener-Khinchin):

$$\Phi_{yy}(\omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_q \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(n+p-q) \exp(-i\omega nT)$$

$$\Phi_{yy}(\omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p \exp(i\omega pT) \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_q \exp(-i\omega qT) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(n+p-q) \exp(-i\omega(n+p-q)T)$$

per cui usando adesso la z-transform:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad x(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} X(z) z^{n-1} dz$$

con $z=\exp(i\omega T)$, la precedente si scrive:

$$\Phi_{yy}(\omega) = H(1/z) H(z) \Phi_{xx}(\omega) = |H(z)|^2 \Phi_{xx}(\omega)$$

prendendo infine la trasformata inversa:

$$\varphi_{yy}(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \Phi_{yy}(\omega) \exp(i\omega nT) d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |H(z)|^2 \Phi_{xx}(\omega) \exp(i\omega nT) d\omega$$

e dunque:

$$\sigma_y^2 = \varphi_{yy}(0) - \mu_y^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |H(z)|^2 \Phi_{xx}(\omega) d\omega - \mu_y^2$$

Posto $L(f)=H(\exp(2\pi ifT))$ e $S_X(f)=\Phi_{xx}(2\pi f)$ essa si scrive anche:

$$\sigma_y^2 = T \int_{-1/2T}^{1/2T} |L(f)|^2 S_X(f) df - \mu_y^2$$

tenendo ora conto che in genere $S_X(f)$ può essere considerata praticamente piatta nell'intorno dell'origine, la precedente si semplifica nella:

⁽³⁾ In questa definizione della trasformata di Fourier compare esplicitamente il periodo di campionamento T utile per esprimere il valore reale della varianza della sequenza (spesso invece si considera T normalizzato ad 1).

$$\sigma_y^2 = S_X(0) T \int_{-1/2T}^{1/2T} |L(f)|^2 df - \mu_y^2 = 2 S_X(0) T B |L(0)|^2 - \mu_y^2 = 2 T B S_X(0) |H(1)|^2 - \mu_y^2$$

essendo B la banda equivalente di rumore definita dalla:

$$B = \frac{1}{2 |L(0)|^2} \int_{-1/2T}^{1/2T} |L(f)|^2 df$$

Poichè allora la varianza dell'ingresso X(z) può essere messa nella forma (H(z)=L(f)=1):

$$\sigma_x^2 = T \int_{-1/2T}^{1/2T} S_X(f) df - \mu_x^2 = S_X(0) - \mu_x^2$$

Si ottiene infine:

$$\sigma_y^2 = 2 T B |H(1)|^2 (\sigma_x^2 + \mu_x^2) - \mu_y^2$$

Se consideriamo in particolare il caso in cui la sequenza x(n) sia a valor medio nullo, come noto anche y(n) è allora a valor medio nullo ($\mu_y = \mu_x = 0$) e la precedente diventa:

$$\sigma_y^2 = 2 T B |H(1)|^2 \sigma_x^2$$

2.3. CALCOLO DI VALOR MEDIO E VARIANZA

2.3.1. Algoritmo a Blocchi

Se si desidera avere valor medio e varianza di un blocco di dati di lunghezza predefinita N si possono usare le seguenti equazioni discendenti direttamente dalla definizione. Detti μ il valor medio e σ^2 la varianza cercati:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \mu)^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^2 - \frac{2\mu}{N} \sum_{k=1}^N x_k + \mu^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^2 - \mu^2$$

entrambe le equazioni possono essere implementate tramite una formula ricorsiva che permette il calcolo man mano che i campioni sono disponibili più una formula finale:

Calcolo	Valor Medio	Varianza
Ad ogni nuovo campione	$m_n = m_{n-1} + x_n$	$s_n = s_{n-1} + x_n^2$
A fine blocco	$\mu = m_N / N$	$\sigma^2 = s_N / N - \mu^2$

Dove m ed s sono variabili temporanee di accumulo.

2.3.2. Algoritmo a Finestra

Se l'obiettivo è quello di avere valor medio e varianza corrente degli ultimi N campioni disponibili allora le equazioni da implementare sono le seguenti. Detti μ_n il valor medio e σ_n^2 la varianza degli ultimi N campioni della serie temporale:

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{n+1-k} = \frac{1}{N} \left(x_{n+1} + \sum_{k=1}^{N-1} x_{n+1-k} \right) = \frac{1}{N} \left(x_{n+1} + \sum_{h=0}^{N-2} x_{n-h} \right)$$

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{N} \left(x_{n+1} + \sum_{h=0}^{N-1} x_{n-h} - x_{n-N+1} \right) = \mu_n + \frac{x_{n+1} - x_{n-N+1}}{N}$$

$$\sigma_{n+1}^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (x_{n+1-k} - \mu_{n+1})^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_{n+1-k} - \mu_n - \frac{x_{n+1} - x_{n-N+1}}{N} \right)^2$$

$$\sigma_{n+1}^2 = \frac{1}{N} \left((x_{n+1} - \mu_n) - \frac{x_{n+1} - x_{n-N+1}}{N} \right)^2 + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \left((x_{n+1-k} - \mu_n) - \frac{x_{n+1} - x_{n-N+1}}{N} \right)^2$$

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1}^2 &= \frac{1}{N} \left((x_{n+1} - \mu_n) - \frac{x_{n+1} - x_{n-N+1}}{N} \right)^2 + \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-2} \left((x_{n-h} - \mu_n) - \frac{x_{n+1} - x_{n-N+1}}{N} \right)^2 \\ \sigma_{n+1}^2 &= \frac{1}{N} \left((x_{n+1} - \mu_n) - \frac{x_{n+1} - x_{n-N+1}}{N} \right)^2 + \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} \left((x_{n-h} - \mu_n) - \frac{x_{n+1} - x_{n-N+1}}{N} \right)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{N} \left((x_{n-N+1} - \mu_n) - \frac{x_{n+1} - x_{n-N+1}}{N} \right)^2 \\ \sigma_{n+1}^2 &= \frac{1}{N} \left((x_{n+1} - \mu_n)^2 - (x_{n-N+1} - \mu_n)^2 - 2 \frac{(x_{n+1} - x_{n-N+1})^2}{N} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} (x_{n-h} - \mu_n)^2 - 2 \frac{1}{N} \frac{x_{n+1} - x_{n-N+1}}{N} \sum_{h=0}^{N-1} (x_{n-h} - \mu_n) + \left(\frac{x_{n+1} - x_{n-N+1}}{N} \right)^2\end{aligned}$$

Tenendo ora conto che $\sum_h (x_{n-h} - \mu_n) = 0$, la precedente si scrive:

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1}^2 &= \frac{1}{N} \left((x_{n+1} - \mu_n)^2 - (x_{n-N+1} - \mu_n)^2 - \frac{(x_{n+1} - x_{n-N+1})^2}{N} \right) + \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} (x_{n-h} - \mu_n)^2 \\ \sigma_{n+1}^2 &= \sigma_n^2 + \frac{1}{N} \left((x_{n+1} - \mu_n)^2 - (x_{n-N+1} - \mu_n)^2 - \frac{(x_{n+1} - x_{n-N+1})^2}{N} \right)\end{aligned}$$

2.3.3. Algoritmo Ricorsivo

Se si vuole avere il valor medio e la varianza dei dati dal primo arrivato al campione corrente si possono adottare le seguenti equazioni ricorsive. Se μ_n è il valor medio e σ_n^2 la varianza dei primi n campioni di una serie temporale:

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} x_k = \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k + \frac{1}{n} x_{n+1} \right) = \frac{n}{n+1} \mu_n + \frac{1}{n+1} x_{n+1}$$

$$\mu_{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} \mu_n + \frac{1}{n+1} x_{n+1} = \mu_n + \frac{1}{n+1} (x_{n+1} - \mu_n) = \mu_n + K (x_{n+1} - \mu_n)$$

dove $K=1/(n+1)$ è detto fattore di guadagno e va aggiornato ad ogni iterazione.

$$\sigma_{n+1}^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (x_k - \mu_{n+1})^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (x_k - \mu_n - K (x_{n+1} - \mu_n))^2$$

$$\sigma_{n+1}^2 = \frac{1}{n+1} \left((x_{n+1} - \mu_n - K (x_{n+1} - \mu_n))^2 + \sum_{k=1}^n (x_k - \mu_n - K (x_{n+1} - \mu_n))^2 \right)$$

$$\sigma_{n+1}^2 = \frac{1}{n+1} \left((1-K)^2 (x_{n+1}-\mu_n)^2 + \sum_{k=1}^n (x_k-\mu_n)^2 - 2K(x_{n+1}-\mu_n) \sum_{k=1}^n (x_k-\mu_n) + nK^2(x_{n+1}-\mu_n)^2 \right)$$

Tenendo ora conto che $\sum_k (x_k - \mu_n) = 0$, la precedente si scrive:

$$\sigma_{n+1}^2 = \frac{1}{n+1} [(1-K)^2 (x_{n+1}-\mu_n)^2 + n\sigma_n^2 + nK^2(x_{n+1}-\mu_n)^2]$$

$$\sigma_{n+1}^2 = \frac{1}{n+1} [((1-K)^2 + nK^2) (x_{n+1}-\mu_n)^2 + n\sigma_n^2]$$

Tenendo ora conto che $K=1/(n+1) \rightarrow n=1/K-1 \rightarrow (1-K)^2 + nK^2 = 1 - 2K + K^2 + K - K^2 = 1 - K$, quindi:

$$\sigma_{n+1}^2 = K \left[(1-K) (x_{n+1}-\mu_n)^2 + \left(\frac{1}{K} - 1 \right) \sigma_n^2 \right] = (1-K) [\sigma_n^2 + K(x_{n+1}-\mu_n)^2]$$

2.3.4. Confronto tra gli Algoritmi

Algoritmo	Descrizione L'algoritmo fornisce valor medio e varianza ...	Vantaggi	Svantaggi
A Blocchi	Di un blocco di dati di lunghezza N	Numero minimo di operazioni	Non fornisce i valori correnti di media e varianza La lunghezza N deve essere predefinita
A Finestra	Correnti degli ultimi N campioni	Fornisce i valori correnti di media e varianza	Necessita di un buffer degli ultimi N campioni La lunghezza N deve essere predefinita
Ricorsivo	Correnti dal primo campione a quello corrente	Fornisce i valori correnti di media e varianza	Necessita di una divisione

Tabella 1 – Confronto degli algoritmi di calcolo di valor medio e varianza

3. Filtri a media

Un filtro a media è definito dalle seguenti equazioni:

$$y_n = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x_{n-k} \quad Y(z) = \frac{1}{M} X(z) \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} = \frac{1}{M} \frac{1-z^{-M}}{1-z^{-1}} X(z)$$

si riconosce facilmente:

$$\lim_{z \rightarrow 1} H(z) = 1 \quad \rightarrow \quad E(Y) = H(1) E(X) = E(X)$$

inoltre la banda equivalente di rumore è data da:

$$B = \frac{1}{2 |L(0)|^2} \int_{-1/2T}^{1/2T} |L(f)|^2 df = \frac{1}{2 |H(1)|^2} \int_{|z|=1} |H(z)|^2 d\left(\frac{\ln z}{2\pi iT}\right) = \frac{1}{4\pi iT} \int_{|z|=1} H(z) H(1/z) \frac{dz}{z}$$

$$B = \frac{1}{4\pi iT M^2} \int_{|z|=1} \frac{1-z^{-M}}{1-z^{-1}} \frac{1-z^M}{1-z} \frac{dz}{z} = \frac{1}{4\pi iT M^2} \int_{|z|=1} \frac{(z^M-1)^2}{z^M (z-1)^2} dz$$

l'unico polo interno al cerchio unitario è il polo multiplo nell'origine z^M per il quale il teorema dei residui fornisce:

$$\text{Res}(z^M) = \frac{1}{(M-1)!} \left[\frac{d^{M-1}}{dz^{M-1}} z^M \frac{(z^M-1)^2}{z^M (z-1)^2} \right]_{z=0} = \frac{1}{(M-1)!} M! = M$$

dunque:

$$B = \frac{1}{4\pi iT M^2} 2\pi i M = \frac{1}{2 T M}$$

per cui la varianza in uscita dal filtro, se la sequenza di ingresso è a valor medio nullo, si può esprimere come (vedi paragrafo 2.2):

$$\sigma_Y^2 = 2 B |H(1)|^2 T \sigma_X^2 = \frac{1}{M} \sigma_X^2$$

Cioè la varianza del segnale di ingresso viene ridotta di un fattore pari all'ordine del filtro.

4. Banda Equivalente di Rumore

La banda equivalente di rumore corrispondente alla funzione di trasferimento del sistema del secondo ordine in esame:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{A(k_1(z-1) + k_2z)}{(z-1)^2 + A(k_1(z-1) + k_2z)}$$

Può essere determinata anche direttamente (senza l'approssimazione $z \approx 1+sT$) dalla:

$$B = \frac{1}{2 |L(0)|^2} \int_{-1/2T}^{1/2T} |L(f)|^2 df = \frac{1}{2 |H(1)|^2} \int_{|z|=1} |H(z)|^2 d\left(\frac{\ln z}{2\pi iT}\right) = \frac{1}{4\pi iT} \int_{|z|=1} H(z) H(1/z) \frac{dz}{z}$$

$$B = \frac{1}{4\pi iT} \int_{|z|=1} \frac{A(k_1(z-1) + k_2z)}{(z-1)^2 + A(k_1(z-1) + k_2z)} \frac{A(k_1(1/z-1) + k_2/z)}{(1/z-1)^2 + A(k_1(1/z-1) + k_2/z)} \frac{dz}{z}$$

Poichè per avere stabilità i poli z_1 e z_2 del sistema $H(z)$ devono essere interni al cerchio unitario, e poichè si dimostra facilmente che i poli z_3 e z_4 della $H(1/z)$ sono dati da $z_3=1/z_2$ $z_4=1/z_1$ (avendo associato z_1 e z_3 al segno “+” e z_2 , z_4 al segno “-” nelle soluzioni dell’equazione di secondo grado associata ai denominatori), necessariamente z_3 e z_4 sono esterni al cerchio unitario per cui nel calcolo dell’integrale vanno considerati solo i residui associati ai poli z_1 e z_2 .

$$B = \frac{1}{4\pi iT} 2\pi i (\text{Res}(z-z_1) + \text{Res}(z-z_2)) = \frac{1}{2T} \frac{2 k_2 + 2 A k_1^2 + A k_1 k_2}{k_1 (4 - A k_2 - 2 A k_1)}$$

5. Potenza di un segnale MPSK

Un segnale modulato MPSK può mettersi in generale nella forma:

$$s(t) = A \sum_k \cos\left(\frac{2\pi p(k)}{M}\right) g(t-kT) \cos(2\pi f_c t) - A \sum_k \sin\left(\frac{2\pi q(k)}{M}\right) g(t-kT) \sin(2\pi f_c t)$$

Essendo $p(k)$ e $q(k)$ in $\{0, \dots, M-1\}$. Considerando un solo chip, ad esempio quello per $k=0$ e ponendo $p(0)=p$ e $q(0)=q$:

$$s_c(t) = A \cos\left(\frac{2\pi p}{M}\right) g(t) \cos(2\pi f_c t) - A \sin\left(\frac{2\pi q}{M}\right) g(t) \sin(2\pi f_c t)$$

L'energia del chip è allora data da:

$$\begin{aligned} E_c &= \int_{-\infty}^{\infty} |s_c(t)|^2 dt = \\ &= A^2 \cos^2\left(\frac{2\pi p}{M}\right) \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 \cos^2(2\pi f_c t) dt + A^2 \sin^2\left(\frac{2\pi q}{M}\right) \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 \sin^2(2\pi f_c t) dt - \\ &\quad - 2 A^2 \sin\left(\frac{2\pi q}{M}\right) \cos\left(\frac{2\pi p}{M}\right) \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 \sin(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t) dt \end{aligned}$$

Per cui, tenendo conto che $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = 1$ e che mediando su tutti i possibili valori di p e q si ha

(come è possibile verificare usando la formula di Eulero e la somma di una serie di potenze):

$$\frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} \cos^2\left(\frac{2\pi p}{M}\right) = \frac{1}{M} \sum_{q=0}^{M-1} \sin^2\left(\frac{2\pi q}{M}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} \cos\left(\frac{2\pi p}{M}\right) = \frac{1}{M} \sum_{q=0}^{M-1} \sin\left(\frac{2\pi q}{M}\right) = 0$$

Detta S la potenza del segnale, si ottiene:

$$E_c = \frac{A^2}{2} \quad S = \frac{A^2}{2 T_c}$$

6. Recupero di fase e frequenza

6.1. INTRODUZIONE

Un approccio del tutto analogo a quello usato per il recupero della temporizzazione può essere seguito anche per il recupero di fase e frequenza. L'anello di aggancio ha in questo caso come ingresso una fase già depurata della frequenza nominale della portante, la quale, dopo l'error detector sarà anche depurata della fase propria dei simboli della costellazione (corrispondente all'informazione trasmessa). Tale fase può quindi essere rappresentata dalla:

$$\theta(t) = \theta_0 + (\mu t + \beta_0) \omega_c t + \omega_{CK} t$$

dove:

θ_0 = errore di fase dovuto al canale di trasmissione

ω_{CK} = errore di frequenza dovuto al disallineamento tra i clocks del trasmettitore e del ricevitore

β_0 = fattore dovuto alla presenza di una frequenza doppler costante (vedi paragrafo 1.2.1)

μ = fattore dovuto alla presenza di una doppler rate (vedi paragrafo 1.2.1)

Si possono allora distinguere i seguenti due casi:

- | | | | | |
|-----------------|---------------|--|---------------|------------------|
| a) $\mu=0$ | \rightarrow | $\theta(t) = \theta_{\text{const}} + \omega_{\text{const}} t$ | \rightarrow | rampa di fase |
| b) $\mu \neq 0$ | \rightarrow | $\theta(t) = \theta_{\text{const}} + \omega_{\text{const}} t + \mu \omega_c t^2$ | \rightarrow | parabola di fase |

Un anello del secondo ordine ha un errore a regime:

- nullo se l'ingresso (fase) è una rampa
- costante se l'ingresso (fase) è una parabola

a cui corrisponde un errore di frequenza a regime (derivata della fase):

- nullo se l'ingresso (fase) è una rampa
- nullo se l'ingresso (fase) è una parabola

6.2. PRESTAZIONI DELL'ALGORITMO

6.2.1. Funzione di trasferimento ed analisi della stabilità

Valgono le considerazioni effettuate nel paragrafo 1.1.1 avendo l'accortezza di sostituire il nodo "FIR" con il nodo "Phase Rotator" (sempre di un nodo sottrattore di tratta). L'ingresso $X(z)$ avrà quindi le dimensioni fisiche di un fase anziché di un tempo ed il coefficiente "A" sarà il guadagno in zona lineare dell'error detector di fase, qui supposto essere un Costas Error Detector (CED) anziché dell'error detector di tempo (ELD). La funzione di trasferimento dell'anello sarà ancora quella riportata nel paragrafo 1.1.1 così come pure le condizioni di stabilità.

6.2.2. Costanti di anello

Per ottenere un transitorio di durata minima le costanti di anello k_1 e k_2 dovranno rispettare la condizione ricavata nel paragrafo 1.1.1.

6.2.3. Banda equivalente di rumore

La banda equivalente di rumore sarà quella determinata nel paragrafo 1.1.1.

6.2.4. Valor medio e varianza della stima

Più sorgenti possono concorrere all'accuratezza della stima di fase e frequenza tra cui le più rilevanti sono:

- errore di troncamento della stima effettuato per ridurre ad un numero accettabile di bits la correzione di fase da applicare al rotatore;
- rumore termico associato con il segnale ricevuto elaborato dal CED;

Errore di troncamento della stima

Come nel paragrafo 0 la varianza dell'errore di troncamento può essere messa nella forma:

$$\sigma_M^2 = 2 B |H(1)|^2 T_s \frac{T_c^2}{12 M^2}$$

Dove M è il numero di fasi diverse applicabili al rotatore (parola di correzione di fase a $\log_2 M$ bits).

Rumore termico

Un CED, a fronte di un errore di fase φ al suo ingresso, restituisce un errore in uscita pari a:

$$e(\varphi) = Q \operatorname{sign}(I) - I \operatorname{sign}(Q)$$

dove I e Q sono le componenti complesse del segnale in uscita dal correlatore, agganciate in temporizzazione e decimate ad un campione per simbolo:

$$I = R \cos(\theta + \varphi) \quad Q = R \sin(\theta + \varphi)$$

Dove R è l'ampiezza del segnale e θ l'angolo di simbolo non affetto da errore (θ in $\{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$). Senza perdere in generalità si può supporre il simbolo appartenente al primo quadrante in modo da avere $\operatorname{sign}(I)=\operatorname{sign}(Q)=1$ e $\theta=\pi/4$. In tal caso si ha:

$$e(\varphi) = R \sin(\pi/4+\varphi) - R \cos(\pi/4+\varphi) = R (\sqrt{2}/2) (\cos(\varphi) + \sin(\varphi) - \cos(\varphi) + \sin(\varphi)) = R\sqrt{2} \sin(\varphi)$$

Questa relazione fornisce una rappresentazione della curva ad S del CED che ha pendenza nell'origine data da:

$$\left(\frac{de(\varphi)}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = (R\sqrt{2} \cos(\varphi))_{\varphi=0} = R\sqrt{2}$$

Questa pendenza rappresenta il fattore di guadagno che subisce l'errore φ nel passaggio attraverso il CED e deve essere compensata in uscita per avere un valore fisico corretto.

Lo schema di principio del CED che include anche la catena di processing a monte è riportato in Figura 6.

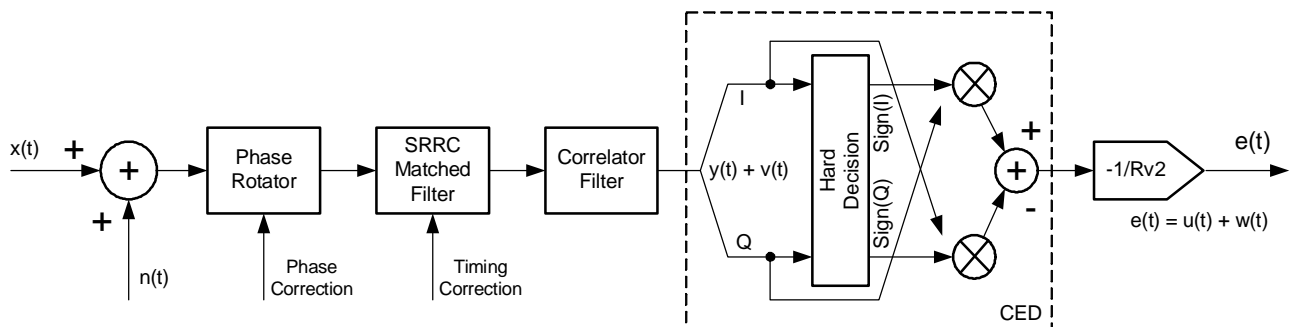


Figura 6 – Schema a blocchi dell’CED e della catena di filtraggio del segnale

La varianza dell’errore in uscita dal CED si può allora determinare dalla:

$$e(t) = \frac{1}{R\sqrt{2}} [(y_Q(t) + v_Q(t)) \operatorname{sign}(y_I(t) + v_I(t)) - (y_I(t) + v_I(t)) \operatorname{sign}(y_Q(t) + v_Q(t))]$$

Se ipotizziamo ora che il rumore non causi errore nella detezione del simbolo (ovvero il simbolo rimanga nel quadrante):

$$e(t) = \frac{1}{R\sqrt{2}} [y_Q(t) \text{sign}(y_I(t)) - y_I(t) \text{sign}(y_Q(t))] + \frac{1}{R\sqrt{2}} [v_Q(t) \text{sign}(y_I(t)) - v_I(t) \text{sign}(y_Q(t))]$$

Dove il primo addendo è il segnale voluto:

$$u(t) = \frac{1}{R\sqrt{2}} [y_Q(t) \text{sign}(y_I(t)) - y_I(t) \text{sign}(y_Q(t))]]$$

mentre il secondo è il termine di rumore.

$$w(t) = \frac{1}{R\sqrt{2}} [v_Q(t) \text{sign}(y_I(t)) - v_I(t) \text{sign}(y_Q(t))]]$$

Ipotizzando ora che i simboli trasmessi siano equiprobabili, e tenendo conto che $\text{sign}(y_I(t))$ e $\text{sign}(y_Q(t))$ possono avere solo valori appartenenti all'insieme $\{-1,1\}$

$$\sigma^2_{\text{sign}(y_I(t))} = \sigma^2_{\text{sign}(y_Q(t))} = \frac{0.5 (1)^2 + 0.5 (-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

le caratteristiche statistiche di $w(t)$ sono date da:

$$E(w) = \frac{1}{R\sqrt{2}} [E(v_Q) E(\text{sign}(y_I(t))) - E(v_I) E(\text{sign}(y_Q(t)))] = 0$$

essendo $E(v_Q)=E(v_I)=0$ se si suppone rumore a media nulla, e:

$$\sigma^2_w = \frac{1}{2R^2} [\sigma^2_{v_Q} \sigma^2_{\text{sign}(y_I(t))} + \sigma^2_{v_I} \sigma^2_{\text{sign}(y_Q(t))}] = \frac{1}{4R^2} [\sigma^2_{v_Q} + \sigma^2_{v_I}] = \frac{1}{4R^2} \sigma^2_v$$

Inoltre, per effetto del correlatore:

$$\sigma^2_v = \frac{T_c}{T_s} \sigma^2_n \quad \rightarrow \quad \sigma^2_w = \frac{T_c}{4 R^2 T_s} \sigma^2_n = \frac{T_c}{4 T_s} \left(\frac{S}{N} \right)^1$$

Essendo S la potenza del segnale ($S=R^2$) ed N la potenza del rumore ($N=\sigma^2_n$).

Posto ora $N=N_0 B_{IF}=N_0(1+\alpha)/T_c$, dove B_{IF} è la banda del segnale ricevuto ed α il fattore di roll-off dello SRRC, si ottiene:

$$\sigma_w^2 = \frac{1+\alpha}{4 T_s} \left(\frac{S}{N_0} \right)^1$$

Considerando infine questa varianza come input al filtro di anello:

$$\sigma_T^2 = 2 B |H(1)|^2 T_s \sigma_w^2 = B |H(1)|^2 \frac{1+\alpha}{2} \left(\frac{S}{N_0} \right)^1$$

6.2.5. Limite di Cramer-Rao

In generale la stima non può avere una varianza migliore del Modified Cramer Rao Bound (MCRB) che, per la frequenza e la fase è dato rispettivamente da:

$$\text{MCRB}_{\text{FREQ}} = \frac{12 B T_c}{\pi^2} \left(\frac{E_s}{N_0} \right)^{-1} = \frac{12 B T_c}{\pi^2 T_s} \left(\frac{S}{N_0} \right)^{-1}$$

$$\text{MCRB}_{\text{PHASE}} = B T_c \left(\frac{E_s}{N_0} \right)^{-1} = \frac{B T_c}{T_s} \left(\frac{S}{N_0} \right)^{-1}$$

essendo E_s l'energia di simbolo qui assimilabile all'energia associata al campione integrato usato nell'anello e pertanto $E_s = S T_s$ dove S e' la potenza del segnale in ingresso all'anello.

6.3. COMPORTAMENTO IN PRESENZA DI DOPPLER

6.3.1. Errore a regime

Un anello del secondo ordine ha errore a regime nullo per ingressi a rampa quali sono quelli dovuti all'azione della doppler rate sulla frequenza della carrier (vedi paragrafo 1.2.1) ma ha un errore a regime costante per quanto riguarda l'azione della doppler rate sulla fase. Infatti dal paragrafo 1.2.1 si ricava che l'errore di fase dovuto alla doppler rate è:

$$\theta(t) = (\mu t + \beta_0) \omega_c t$$

il cui termine quadratico $\mu \omega_c t^2$ crea un ingresso a parabola il quale provoca un errore a regime non nullo (costante). Seguendo il procedimento riportato nel paragrafo 1.2.1 (sostituzione di μ con $\mu \omega_c$) si ottiene:

$$\varepsilon_\infty = \frac{2 \mu \omega_c}{\omega_n^2}$$

Dove ε_∞ è un numero puro (fase) essendo μ espressa in sec^{-1} .

6.3.2. Banda ottima

Ricalcando l'approccio di paragrafo 1.2.2 si deve minimizzare la:

$$f(B) = \sqrt{\sigma_M^2} + \sqrt{\sigma_T^2} + \varepsilon_\infty$$

Con:

$$\sigma_M^2 = \frac{a B}{M^2} \quad a = 2 |H(1)|^2 T_s \frac{T_c^2}{12}$$

$$\sigma_T^2 = b_{S/N_0} B \quad b_{S/N_0} = \frac{1 + \alpha}{2} \left(\frac{S}{N_0} \right)^{-1}$$

$$\varepsilon_\infty = \frac{c \mu}{B^2} \quad c = \frac{\omega_c}{2} \left(\zeta + \frac{1}{4\zeta} \right)^2$$

Si tratta delle stesse dipendenze delle varianze e dell'errore a regime ottenute per la banda ottima dell'anello di temporizzazione ma in cui i coefficienti a,b,c sono diversi.

Questa minimizzazione, come già ricavato, fornisce:

$$B_{\text{OPT}} = \left(\frac{4 c \mu}{\frac{\sqrt{a}}{M} + \sqrt{b_{S/N_0}}} \right)^{2/5}$$

6.4. VALUTAZIONI NUMERICHE

Per avere un esempio numerico poniamo:

Grandezza	Valore Numerico
Modulo della funzione di trasferimento	$ H(1) = 1$
Periodo di simbolo (periodo di lavoro dell'anello)	$T_s = 1/(3.000 \text{ KHz})$
Periodo di chip	$T_c = 1/(3.069 \text{ MHz})$
Fattore di roll-off dello SRRC	$\alpha = 0.22$
Rapporto segnale/rumore	$S/N_0 = 41 \text{ dBHz}$
Pulsazione della portante	$\omega_c = 2\pi (70 \text{ MHz})$
Coefficiente di smorzamento dell'anello del 2° ordine	$\zeta = 0.7$
Valore massimo della doppler rate riportato in [R6], [R7]	$\mu = 6 \cdot 10^{-10} \text{ sec}^{-1}$
Numero di fasi diverse applicabili al rotatore	$M = 256$

Tabella 2 - Valori di ingresso per l'esempio numerico dell'anello di fase con CED

Ottenendo:

Grandezza	Valore Numerico
Coefficiente "a" della banda ottima	$a = 2 H(1) ^2 T_s \frac{T_c^2}{12} = 5.9 \cdot 10^{-18}$
Coefficiente "b" della banda ottima	$b_{S/N_0} = \frac{1 + \alpha}{2} \left(\frac{S}{N_0} \right)^{-1} = 48.4 \cdot 10^{-6}$
Coefficiente "c" della banda ottima	$c = \frac{\omega_c}{2} \left(\zeta + \frac{1}{4\zeta} \right)^2 = 245.6 \cdot 10^6$
Banda ottima	$B_{OPT} = \left(\frac{4 c \mu}{\frac{\sqrt{a}}{M} + \sqrt{b_{S/N_0}}} \right)^{2/5} = 14.9 \text{ Hz}$
Deviazione standard della stima di fase dovuta all'errore di troncamento della fase applicata al rotatore	$\sqrt{\sigma_M^2} = \sqrt{\frac{a B_{OPT}}{M^2}} = 36.6 \cdot 10^{-12} \text{ rad}$
Deviazione standard della stima di fase dovuta al rumore termico	$\sqrt{\sigma_T^2} = \sqrt{b_{S/N_0} B_{OPT}} = 26.6 \cdot 10^{-3} \text{ rad} (= 1.52^\circ)$
Deviazione standard della stima di fase dovuta all'errore a regime	$\varepsilon_\infty = \frac{c \mu}{B_{OPT}^2} = 0.66 \cdot 10^{-3} \text{ rad} (= 0.04^\circ)$
Deviazione standard della stima di fase complessiva	$f(B) = \sqrt{\sigma_M^2} + \sqrt{\sigma_T^2} + \varepsilon_\infty = 1.56^\circ$
Deviazione standard della stima di fase complessiva	$MCRB_{PHASE} = \frac{B_{OPT} T_c}{T_s} \left(\frac{S}{N_0} \right)^{-1} = 11.8 \cdot 10^{-3} \text{ rad} (= 0.68^\circ)$

Tabella 3 - Valori ottenuti per l'esempio numerico dell'anello di fase con CED